Exercice 1

1. **Réponse c** : $\ln(2x+1)=3 \iff \begin{cases} 2x+1>0 \\ \text{ et } \\ 2x+1=e^3 \end{cases} \iff \begin{cases} x>-\dfrac{1}{2} \\ \text{ et } \\ x=\dfrac{e^3-1}{2} \end{cases} \iff x=\dfrac{e^3-1}{2}$.

2. **Réponse a** : $\dfrac{e^{3x+1}\times e^{2x}}{e^{x+2}}=e^{3x+1+2x-x-2}=e^{4x-1}$.

3. **Réponse c** : $f'(x)=3\times e^x+3x\times e^x=(3+3x)e^x=3(x+1)e^x$.

4. **Réponse b** : $\ln(25e^x)+\ln\left(\dfrac{5}{e}\right)=\ln(25)+\ln(e^x)+\ln(5)-\ln(e)=2\ln(5)+x+\ln(5)-1=3\ln(5)+x-1$.

Exercice 2

1.
   a. D'une année à l'autre, le capital disponible subit une augmentation de 4 %. La somme disponible est donc multipliée par $1+\frac{4}{100}=1{,}04$. De plus chaque année, on place 1 000 euros sur ce compte, donc pour passer du capital disponible l'année 0 + 1, on multiplie le capital disponible l'année n et on ajoute 1 000 €.
   Donc $U_{n+1}=1{,}04\times U_n+1\,000$.
   b. La suite (U_n) n'est pas arithmétique car elle n'est pas de forme $U_{n+1}=U_n+r$ avec r constant. De même, la suite (U_n) n'est pas géométrique car elle n'est pas de forme $U_{n+1}=U_n\times q$ avec q constant.
   Comme $U_{n+1}=U_n\times a+b$ avec a et b constant, il s'agit d'une suite arithmético-géométrique.
2.
   a. $$\begin{aligned}V_{n+1}&=U_{n+1}+25\,000\\&=1{,}04U_n+1\,000+25\,000\\&=1{,}04U_n+26\,000\\&=1{,}04\left(V_n-25\,000\right)+26\,000\\&=1{,}04V_n-26\,000+26\,000\\&=1{,}04V_n.\end{aligned}$$
   La suite (V_n) est donc géométrique de raison 1,04 et de premier terme :
   $$V_0=U_0+25\,000=a+25\,000.$$
   b. $V_n=V_0\times q^n=(a+25\,000)\times 1{,}04^n$.
   c. $U_n=V_n-25\,000=\left(a+25\,000\right)\times 1{,}04^n-25\,000$.
3. Pour 2014, n = 4. Il faut donc déterminer la valeur de a telle que :
   $$U_n\geq 25\,000$$
   Donc $\left(a+25\,000\right)\times 1{,}04^4-25\,000\geq 25\,000$
   Donc $\left(a+25\,000\right)\times 1{,}04^4\geq 50\,000$
   Donc $a+25\,000\geq\frac{50\,000}{1{,}04^4}$
   Donc $a\geq\frac{50\,000}{1{,}04^4}-25\,000$
   Donc $a\geq 17\,740{,}21$ €.
   Le placement initial devra donc être supérieur à 17 740,21 € pour qu'au 1er janvier 2014 la personne dispose d'au moins 25 000 €.

Exercice 3

Partie A

On considère la fonction f définie sur [-5 ; 3] par $f(x)=(ax+b)e^{0,5x}$, où *a* et *b* sont deux réels fixés.

1) a) $f(0)$ est l'image de 0 par la fonction *f*.

Sur le graphique, $f(0)$ correspond donc à l'ordonnée de la courbe représentant *f* à l'abscisse 0.

On peut lire $f(0)=2$

b) $f'(0)$ correspond à la pente de la tangente à la courbe représentant f au point d'abscisse 0.

On peut lire cette pente graphiquement : c'est le coefficient directeur de la tangente : $f'(0)=4$

2) On a vu que $f(0)=2$.

Or, $f(0)=(a\times 0+b)e^{0,5\times 0}=be^{0}=b\times 1=b$ } On obtient b = 2

D'autre part, $f'(0)=4$.

Et $f'(x)=\left((ax+b)e^{0,5x}\right)'=ae^{0,5x}+(ax+b)\times 0,5e^{0,5x}$

D'où $f'(0)=ae^{0,5\times 0}+(a\times 0+2)\times 0,5e^{0,5\times 0}=a+0,5\times 2=a+1$ } On obtient a + 1 = 4 soit a = 3

La fonction f définie sur [-5 ; 3] a pour expression : $f(x)=(3x+2)e^{0,5x}$

3) Le nombre de solutions de l'équation $f(x)=-1$ correspond au nombre de points d'intersection entre la courbe (*C*) et la droite y = -1 : traits de construction à faire apparaître.

Il n'y a qu'une seule solution à cette équation sur [-5 ; 3].

Partie B

On considère la fonction g définie sur [-5 ; 3] par $g(x)=(3x+2)e^{0,5x}$, où *a* et *b* sont deux réels fixés.

1) Pour tout $x\in[-5;3]$,

$g'(x)=\left((3x+2)e^{0,5x}\right)'=3e^{0,5x}+(3x+2)\times 0,5e^{0,5x}=3e^{0,5x}+1,5xe^{0,5x}+1e^{0,5x}$

$=e^{0,5x}(3+1,5x+1)=(1,5x+4)e^{0,5x}$

2) Etude du signe de la dérivée $g'(x)$:

$e^{0,5x}>0$ pour tout réel *x*.

Le signe de la dérivée ne dépend donc que du signe de $1,5x+4$.

$1,5x+4>0 \Leftrightarrow 1,5x>-4$

Or $\Leftrightarrow x>\dfrac{-4}{1,5} \Leftrightarrow x>-\dfrac{8}{3}$

On obtient le tableau de variation ci-contre :

x	-5		$-\frac{8}{3}$		$-\frac{2}{3}$		3
1,5x + 4		−	0	+		+	
$e^{0,5x}$		+		+		+	
$g'(x)$		−	0	+		+	
$g(x)$	$g(-5)$ $\approx -1,1$	↘	$g\left(-\frac{8}{3}\right)$ $\approx -1,6$	↗	0	↗	$g(3)$ $\approx 49,3$

$g(-5)=(3\times(-5)+2)e^{0,5\times(-5)}=-13e^{-2,5}\approx -1,1$

$g\left(-\frac{8}{3}\right)=\left(3\times\left(-\frac{8}{3}\right)+2\right)e^{0,5\times\left(-\frac{8}{3}\right)}=-6e^{-\frac{4}{3}}\approx -1,6$

$g(3)=(3\times 3+2)e^{0,5\times 3}=11e^{1,5}\approx 49,3$

3) Etude du signe de $g(x)$:

$e^{0,5x} > 0$ pour tout réel *x*. Le signe de $g(x)$ ne dépend donc que du signe de $3x+2$.

Or $3x+2>0 \Leftrightarrow 3x>-2 \Leftrightarrow x>\frac{-2}{3}$.

Donc, tout comme $3x+2$, $g(x)>0$ pour tout $x\in\left[-\frac{2}{3};3\right]$ et $g(x)<0$ pour tout $x\in\left[-5;-\frac{2}{3}\right]$

4) Démontrer que $g(x)=-1$ admet une unique solution dans $[-5;3]$.

Remarquons dans un premier temps que la fonction $g(x)=(3x+2)e^{0,5x}$ est continue sur *R* (et donc à fortiori sur $[-5;3]$), en tant que composée de fonctions exponentielle et affines, continues sur *R*.

Ensuite on décompose l'intervalle $[-5;3]$ en deux intervalles :

Sur $\left[-5;-\frac{2}{3}\right]$, la fonction *g* est strictement décroissante entre les valeurs $g(-5)\approx -1,1$ et $g\left(-\frac{8}{3}\right)\approx -1,6$

Comme $-1\notin[-1,1;-1,6]$, l'équation $g(x)=-1$ n'a pas de solutions sur $\left[-5;-\frac{2}{3}\right]$.

Sur $\left[-\frac{2}{3};3\right]$, la fonction *g* est strictement croissante entre les valeurs $g\left(-\frac{8}{3}\right)\approx -1,6$ et $g(3)\approx 49,3$

Avec cette stricte monotonie et la continuité de la fonction, le théorème des valeurs intermédiaires affirme qu'il existe une unique solution sur $\left[-\frac{2}{3};3\right]$ à l'équation $g(x)=-1$.

C'est aussi l'unique solution sur $[-5;3]$.

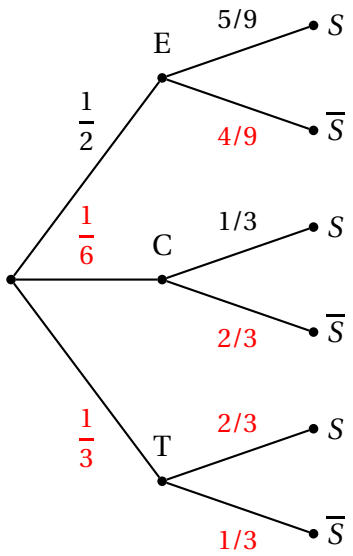
En utilisant les tables de la calculatrice, avec un pas de 0,01, on obtient l'encadrement :

$$g(x)=-1 \text{ pour } -1,31<x<-1,3$$

Valeur approchée par défaut : -1,31. Valeur approchée par excès : -1,3.

Exercice 4 (spécifique)

1.



NB : on a reporté en rouge les probabilités que l'on peut déterminer au fur et à mesure des questions de l'exercice ; toutes n'étaient pas demandées.

2. $P(\mathrm{E} \cap \mathrm{S}) = P(\mathrm{E}) \times P_{\mathrm{E}}(\mathrm{S}) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{5}{9} = \dfrac{5}{18}$.

3. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(\mathrm{S}) = P(\mathrm{E} \cap \mathrm{S}) + P(\mathrm{C} \cap \mathrm{S}) + P(\mathrm{T} \cap \mathrm{S}).$$

On en déduit : $P(\mathrm{C} \cap \mathrm{S}) = P(\mathrm{S}) - P(\mathrm{E} \cap \mathrm{S}) - P(\mathrm{T} \cap \mathrm{S}) = \dfrac{5}{9} - \dfrac{5}{18} - \dfrac{2}{9} = \dfrac{1}{18}$.

4. $P_{\mathrm{S}}(\mathrm{T}) = \dfrac{P(\mathrm{S} \cap \mathrm{T})}{P(\mathrm{S})} = \dfrac{2}{9} \times \dfrac{9}{5} = \dfrac{2}{5}$.