Exercice 1 **5 points**

1. Un magasin de matériel informatique vend deux modèles d'ordinateur au même prix et de marques M_1 et M_2. Les deux ordinateurs ont les mêmes caractéristiques et sont proposés en deux couleurs : noir et blanc.
D'après une étude sur les ventes de ces deux modèles, 70 % des acheteurs ont choisi l'ordinateur M_1 et, parmi eux, 60 % ont préféré la couleur noire. Par ailleurs, 20 % des clients ayant acheté un ordinateur M_2 l'ont choisi de couleur blanche.
On utilise la liste des clients ayant acheté l'un ou l'autre des ordinateurs précédemment cités et on choisit un client au hasard.

   a. La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un ordinateur M_2 de couleur noire est :
   Réponse A : $\frac{3}{5}$ **Réponse B :** $\frac{4}{5}$ **Réponse C :** $\frac{3}{50}$ **Réponse D :** $\frac{6}{25}$

   b. La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un ordinateur de couleur noire est :
   Réponse A : $\frac{21}{50}$ **Réponse B :** $\frac{33}{50}$ **Réponse C :** $\frac{3}{5}$ **Réponse D :** $\frac{12}{25}$

   c. Le client a choisi un ordinateur de couleur noire. La probabilité qu'il soit de marque M_2 est :
   Réponse A : $\frac{4}{11}$ **Réponse B :** $\frac{6}{25}$ **Réponse C :** $\frac{7}{11}$ **Réponse D :** $\frac{33}{50}$

Eléments de correction :

a. $P(M_2 \cap N) = 0{,}3 \times 0{,}8 = \frac{24}{100} = \frac{6}{25}$ réponse D

b. $P(N) = \frac{6}{25} + \frac{42}{100} = \frac{33}{50}$ réponse B

c. $P_N(M_2) = \frac{6/25}{33/50} = \frac{12}{33} = \frac{4}{11}$ réponse A

2. Soit z le nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et d'argument $\frac{\pi}{3}$. On a alors :
   Réponse A : $z^{14} = -128\sqrt{3} - 128\mathrm{i}$ **Réponse C :** $z^{14} = -64 + 64\mathrm{i}\sqrt{3}$
   Réponse B : $z^{14} = 64 - 64\mathrm{i}$ **Réponse D :** $z^{14} = -128 + 128\mathrm{i}\sqrt{3}$

$|z| = \sqrt{2}$ $|z^{14}| = |z|^{14} = \sqrt{2}^{14} = 128$

$\arg(z) = \frac{\pi}{3}$ $\arg(z^{14}) = 14\arg(z)\,(2\pi) = 14\frac{\pi}{3}(2\pi) = \frac{14\pi}{3} - 4\pi(2\pi) = \frac{2\pi}{3}(2\pi)$

Donc $z^{14} = 128\left(cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}sin\frac{2\pi}{3}\right) = 128\left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -64 + 64\mathrm{i}\sqrt{3}$ réponse C

3. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, le point S d'affixe 3 et le point T d'affixe 4i.
Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 3| = |3 - 4\mathrm{i}|$. Alors :
   Réponse A : (E) est la médiatrice du segment [ST]
   Réponse B : (E) est la droite (ST)
   Réponse C : (E) est le cercle de centre Ω d'affixe 3 – 4i, et de rayon 3
   Réponse D : (E) est le cercle de centre S et de rayon 5

$|z - 3| = SM$ et $|3 - 4\mathrm{i}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$ $SM = 5$ réponse D

4. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2e^x}{e^x-1}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

a. La limite de f en $+\infty$ est :

Réponse A : -1

Réponse B : 2

Réponse C : $+\infty$

Réponse D : n'a pas de limite

b. La courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote d'équation :

Réponse A : $x=0$

Réponse B : $y=0$

Réponse C : $y=-1$

Réponse D : n'a pas d'asymptote parallèle à l'un des axes

c. La limite de f en 0 est :

Réponse A : $-\infty$

Réponse B : 2

Réponse C : $+\infty$

Réponse D : n'a pas de limite

$a.$ $f(x)=\dfrac{2e^x}{e^x-1}=\dfrac{2}{1-\dfrac{1}{e^x}}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$ réponse B

$b.$ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$ C admet une asymptote horizontale d'équation $y=2$

$f(x)=\dfrac{2e^x}{e^x-1}$ $\lim\limits_{x\to0}2e^x=2$ et $\lim\limits_{x\to0^+}e^x-1=0^+$ donc $\lim\limits_{x\to0}f(x)=+\infty$

C admet une asymptote verticale d'équation $x=0$ réponse A

$c.$ $\lim\limits_{x\to0}f(x)=+\infty$ réponse C

Exercice 2 **4 points**

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2-2z+5=0.$$

$\Delta=-16<0$ l'équation a deux solutions complexes conjuguées $z_1=\dfrac{2-4i}{2}=1-2i$ et $z_2=1+2i$

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D où :

$$z_A=1+2i,\quad z_B=\overline{z_A},\quad z_C=1+\sqrt{3}+i,\quad z_D=\overline{z_C}.$$

a) Placer les points A et B dans le repère $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

Voir figure à la fin de l'exercice

b) Calculer $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}$ et donner le résultat sous forme algébrique.

$$\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{1-2i-(1+\sqrt{3}+i)}{1+2i-(1+\sqrt{3}+i)}=\frac{-\sqrt{3}-3i}{-\sqrt{3}+i}=\frac{(-\sqrt{3}-3i)(-\sqrt{3}-i)}{(-\sqrt{3}+i)(-\sqrt{3}-i)}=\frac{3-3+\sqrt{3}i+3\sqrt{3}i}{4}=\frac{4\sqrt{3}i}{4}$$
$$=\sqrt{3}i$$

c) En déduire la nature du triangle ABC.

$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \sqrt{3}\mathrm{i}$ est un imaginaire pur et donc $\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$

$$\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \arg(z_B - z_C) - \arg(z_A - z_C)\,(2\pi) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{CB}\right) - \left(\vec{u}, \overrightarrow{CA}\right)(2\pi) = \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)(2\pi) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$$

Conclusion le triangle ACB est rectangle en C

(non isocèle car $\frac{CB}{CA} = \sqrt{3}$)

3. Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon.

ACB est rectangle en C, il est donc inscrit dans le cercle de diamètre [AB] (hypoténuse)

Le centre du cercle est donc le milieu de [AB] qui est le point I d'affixe $z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{z_A + \overline{z_A}}{2} = \frac{z_A + \overline{z_A}}{2} = Re(z_A) = 1$ et de rayon $\frac{AB}{2} = \frac{|z_B - z_A|}{2} = \frac{|\overline{z_A} - z_A|}{2} = |-2\mathrm{i}| = 2$

Les points A, B et C appartiennent au cercle de centre I d'affixe 1 et de rayon 2

$$ID = |z_D - z_I| = \left|\sqrt{3} - \mathrm{i}\right| = 2$$

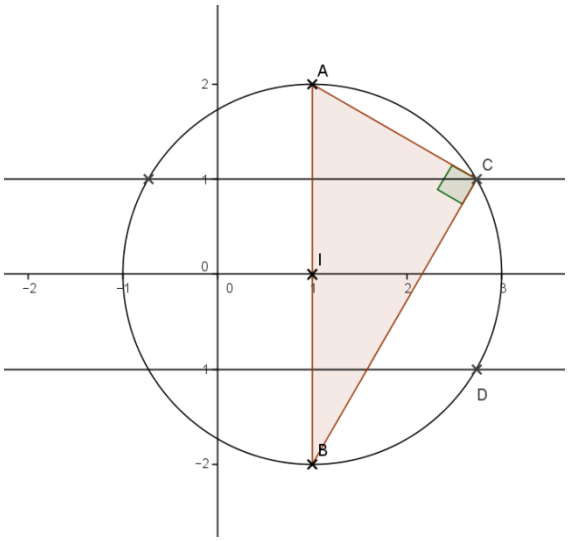
Donc D appartient au cercle de centre I d'affixe 1 et de rayon 2

4. Construire les points C et D dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ en expliquant le protocole de construction.

On trace le cercle de centre I d'affixe 1 et de rayon 2

C appartient à ce cercle, il a une abscisse positive et pour ordonnée 1 (on trace la droite d'équation y=1 et C est le point d'intersection avec le cercle –abscisse positive)

$z_D = \overline{z_C}$ D est donc le symétrique de C par rapport à l'axe des réels (ordonnée -1)



Exercice 3 **5 points**

Partie A

On considère l'algorithme suivant :
Les variables sont le réel U et les entiers naturels k et N.

Entrée Saisir le nombre entier naturel non nul N. **Traitement** Affecter à U la valeur 0 Pour k allant de 0 à $N-1$ Affecter à U la valeur $3U-2k+3$ Fin pour **Sortie** Afficher U

Quel est l'affichage en sortie lorsque $N=3$?

N=3 U=0 (boucles pour k allant de 0 à 2)

Pour k=0 U=3 pour k=1 U=10 pour k=2 U=29

L'affichage de sortie est donc U=29

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=0$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1}=3u_n-2n+3.$$

1. Calculer u_1 et u_2.

$u_1 = 3u_0 - 2\times 0 + 3 = 3$ $u_2 = 3u_1 - 2\times 1 + 3 = 10$

2. a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

<u>Initialisation</u> : pour $n=0$, $u_0 = 0$ et $0 \leq u_0$ donc la propriété est vraie pour $n=0$

<u>Hérédité</u> : supposons que pour un entier naturel $k \geq 0$, $k \leq u_k$ (hypothèse de récurrence)

Montrons que : $k+1 \leq u_{k+1}$

$$k \leq u_k$$
$$3k \leq 3u_k$$
$$3k-2k \leq 3u_k - 2k$$
$$k \leq 3u_k - 2k$$
$$k+3 \leq 3u_k - 2k + 3$$
$$k+1 \leq k+3 \leq u_{k+1}$$

$k+1 \leq u_{k+1}$

<u>Conclusion</u> : la propriété est vraie pour $n=0$ et est héréditaire donc,

pour tout entier n, $n \leq u_n$

b) En déduire la limite de la suite (u_n).

pour tout entier n, $n \leq u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$

D'après le théorème de comparaison

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

$$u_{n+1} - u_n = 3u_n - 2n + 3 - u_n = 2u_n - 2n + 3 \geq 2n - 2n + 3$$

$$u_{n+1} - u_n \geq 0$$

La suite (u_n) est donc croissante

4. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n + 1$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) + 1 = 3u_n - 2n + 3 - n = 3(u_n - n + 1) = 3v_n$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison 3 et de terme initial $v_0 = u_0 - 0 + 1 = 1$

b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + n - 1$.

La suite (v_n) est donc géométrique de raison 3 et de terme initial $v_0 = 1$

$v_n = v_0 \times 3^n = 3^n$ et $v_n = u_n - n + 1$

$u_n = v_n + n - 1$ donc $u_n = 3^n + n - 1$

5. Soit p un entier naturel non nul.

a) Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$?

$\lim\limits_{n \to +\infty} 3^n = +\infty$ car $3 > 1$

$$\lim_{n \to +\infty} n - 1 = +\infty$$

Par somme $\lim\limits_{n \to +\infty} 3^n + n - 1 = +\infty$

Et par définition on peut affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ $u_n \geq 10^p$

b) Déterminer, à l'aide de la calculatrice et pour la valeur $p = 3$, le plus petit entier n_0 vérifiant la question précédente.

On cherche le plus petit entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ $u_n \geq 10^3$

n	u_n
0	0
1	3
2	10
3	29
4	84
5	247
6	734
7	2193
8	6568
9	19691
10	59058

Donc pour p=3 ; $n_0 = 7$

Exercice 4

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(\mathrm{O};\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$

1. Vérifier que, pour tout x réel, $f(-x) = -f(x)$.
Donner une interprétation graphique de cette propriété.

Pour tout x réel, $f(-x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-(-x)}}{2} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x}}{2} = -f(-x)$.

Une fonction vérifiant la propriété précédente est dite *impaire*. Graphiquement, cela signifie que si un point $\mathrm{M}(x;y)$ est un point de la courbe $\mathcal{C}$ si et seulement si le point $\mathrm{N}(-x;-y)$ est aussi un point de cette courbe. Ainsi, la courbe $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'origine O du repère.

2. Etudier la limite de f en $+\infty$.

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la dérivée $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation de la fonction f en y indiquant les limites aux bornes.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel, $f'(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$. On en déduit que la dérivée f' est une fonction strictement positive sur $\mathbb{R}$ et donc que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et que f est impaire, on a donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Le tableau de variations de f s'en déduit alors aisément.

Partie B

On considère le point A du plan de coordonnées $(1\,;\,0)$ et on s'intéresse au minimum de la distance AM où M est un point de la courbe $\mathcal{C}$.

1. M étant un point d'abscisse x de la courbe $\mathcal{C}$, calculer en fonction de x la distance AM (on pourra visualiser la courbe $\mathcal{C}$ à l'aide de la calculatrice).

Le point A ayant pour coordonnnées $(1;0)$ et le point M ayant pour coordonnées $(x;f(x))$, dans un repère orthonormal on a :

$$\mathrm{AM} = \sqrt{(x-1)^2 + (f(x)-0)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + \frac{\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)^2}{4}}$$

2. On considère maintenant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (x-1)^2 + \frac{\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)^2}{4}.$$

a) Calculer $g'(x)$.

Pour tout réel x, $g'(x) = 2(x-1) + \dfrac{2}{4}\left(e^x - e^{-x}\right) \times \left(e^x + e^{-x}\right) = 2(x-1) + \dfrac{1}{2}\left(e^{2x} - e^{-2x}\right)$.

b) On désigne par g'' la fonction dérivée seconde de g, c'est-à-dire la fonction dérivéee de g'.
Montrer que pour tout x réel :

$$g''(x) = \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x} + 2.$$

Pour tout réel x, $g''(x) = (g')'(x) = 2 + \dfrac{1}{2}\left(2e^{2x} - \left(-2e^{-2x}\right)\right) = \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x} + 2$.

c) En déduire les variations de g' sur $\mathbb{R}$.

g'' est une fonction strictement positive sur $\mathbb{R}$ et donc g' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

d) Montrer qu'il existe un unique nombre réel α vérifiant $g'(\alpha) = 0$. puis, vérifier par le calcul, que : $0,46 \leqslant \alpha \leqslant 0,47$.

g' est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} g'(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g'(x) = +\infty$ (par opérations simples) donc 0 est une valeur intermédiaire de la fonction g' sur $\mathbb{R}$. On en déduit, d'après le cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires, que l'équation $g'(x) = 0$ admet une et une seule solution α sur $\mathbb{R}$. On vérifie ensuite que $g'(0,46) < 0$ et $g'(0,47) > 0$ ce qui permet d'en déduire que $0,46 < \alpha < 0,47$.

e) En déduire le signe de $g'(x)$ selon les valeurs de x.

D'après les variations de g' et la question précédente, on a g' strictement négative sur $]-\infty;\alpha[$, strictement positive sur $]\alpha;+\infty[$ et nulle pour $x = \alpha$.

f) Déterminer les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ (on ne demande pas les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$). Quel est le minimum sur $\mathbb{R}$ de la fonction g ?

D'après le signe de g', la fonction g est strictement décroissante sur $]-\infty;\alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha;+\infty[$, avec un minimum atteint en α qui vaut $g(\alpha) = (\alpha-1)^2 + \dfrac{\left(\mathrm{e}^{\alpha} - \mathrm{e}^{-\alpha}\right)^2}{4}$.

3. Justifier que la distance AM est minimum au point M_α d'abscisse α de la courbe $\mathcal{C}$.

Pour tout point $\mathrm{M}(x; f(x))$ de la courbe $\mathcal{C}$, on a AM$= \sqrt{g(x)}$ donc le minimum de AM est atteint si et seulement si celui de $g(x)$ est atteint. C'est donc bien au point M_α d'abscisse α que la distance AM est minimale.

En déduire un encadrement de cette distance minimale à 10^{-1} près.

Etant donné que la fonction $[x \mapsto \sqrt{g(x)}]$ atteint un minimum en α, un encadrement de α ne permet pas de déduire un encadrement de $\sqrt{g(\alpha)}$. Pour obtenir un encadrement de AMα, on peut tracer, à la calculatrice, la courbe de la fonction $[x \mapsto \sqrt{g(x)}]$ et, en effectuant un bon réglage de la fenêtre, conjecturer que $0,72 < \mathrm{AM}_\alpha < 0,73$.