

Fonction carré

Exercice 1

Les images par la fonction carré des nombres : -6 ; $\frac{2}{7}$; $\frac{3}{4}$; 10^{-5} ; 10^3
sont, dans l'ordre : 36 ; $\frac{4}{49}$; $\frac{9}{4}$; 10^{-10} ; 10^6 .

Exercice 2

- Les solutions de l'équation $x^2 = 16$ sont 4 et -4.
- Les solutions de l'équation $x^2 = 5$ sont $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$.
- L'équation $x^2 = -2$ n'a pas de solution (car x^2 est toujours positif ou nul).
- Les solutions de l'équation $x^2 = 10^{16}$ sont 10^8 et -10^8 .

Exercice 3

- $2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2}$. Les solutions sont donc $\sqrt{\frac{1}{2}}$ et $-\sqrt{\frac{1}{2}}$.
- $4 - x^2 = 6 \Leftrightarrow x^2 = -2$. Cette équation n'a pas de solution.
- $2x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1$. Les solutions sont 1 et -1.
- $25x^2 - 5 = 4 \Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{25}$. Les solutions sont $\frac{3}{5} = 0,6$ et $-\frac{3}{5} = -0,6$.

Exercice 4

- $(x + 1)^2 = 16 \Leftrightarrow x + 1 = 4$ OU $x + 1 = -4 \Leftrightarrow x = 3$ OU $x = -5$.
Les solutions sont 3 et -5.
- $(3x - 2)^2 = 25 \Leftrightarrow 3x - 2 = 5$ OU $3x - 2 = -5 \Leftrightarrow x = \frac{7}{3}$ OU $x = -1$.
Les solutions sont $\frac{7}{3}$ et -1.
- $(2x - 1)^2 = x^2 \Leftrightarrow 2x - 1 = x$ OU $2x - 1 = -x \Leftrightarrow x = 1$ OU $x = \frac{1}{3}$.
Les solutions sont 1 et $\frac{1}{3}$.
- $(x - 1)^2 = (3x + 4)^2 \Leftrightarrow x - 1 = 3x + 4$ OU $x - 1 = -(3x + 4) \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$ OU $x = -\frac{3}{4}$.
Les solutions sont $-\frac{5}{2}$ et $-\frac{3}{4}$.

Exercice 5

Méthode : on peut raisonner en utilisant le sens de variation de la fonction carré
ou en s'aidant d'un dessin.

- On a $0,6 < 2,35$ et ces deux nombres appartiennent à l'intervalle $[0 ; +\infty[$ sur lequel la fonction carré est strictement croissante. Elle conserve l'ordre : $0,6^2 < 2,35^2$.
- On sait que $-102,6 < -60$ et ces deux nombres appartiennent à l'intervalle $]-\infty ; 0]$ sur lequel la fonction carré est strictement décroissante.
Elle renverse donc l'ordre : $(-102,6)^2 > (-60)^2$.
- On sait que $-25 < 36$ mais on ne peut rien en déduire sur leurs images par la fonction carré car sur l'intervalle $[-25 ; 36]$, cette fonction change de sens de variation en 0.
Mais on sait que $(-25)^2 = 25^2$.
Comme $25 < 36$ on peut alors déduire que $25^2 < 36^2$ donc aussi que $(-25)^2 < 36^2$.

d. On a $\frac{7}{8} < 1 < \frac{8}{7}$ donc $\frac{7}{8} < \frac{8}{7}$ et par conséquent $\left(\frac{7}{8}\right)^2 < \left(\frac{8}{7}\right)^2$ puisque la fonction carré est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Exercice 6

Méthode : on s'aide d'un dessin.

a. $x^2 \leq 49$ équivaut à $-7 \leq x \leq 7$. Ceci revient à dire que $x \in [-7; 7]$.

b. $x^2 > 1$ équivaut à $x > 1$ OU $x < -1$. Ceci peut encore s'écrire $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.

c. $x^2 < 3$ équivaut à $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ ou encore à $x \in]-\sqrt{3}; \sqrt{3}[$.

d. $x^2 \geq -8$ est vrai pour tout x réel car x^2 est toujours positif ou nul, donc supérieur ou égal à 0, et a fortiori supérieur ou égal à -8 .

Exercice 7

a. La fonction carré est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. On en déduit que : si $2 \leq x \leq 4$, alors $2^2 \leq x^2 \leq 4^2$ c'est-à-dire $4 \leq x^2 \leq 16$.

b. La fonction carré est strictement décroissante sur $] -\infty; 0]$. On en déduit que : si $-3 \leq x \leq -1$ alors $(-3)^2 \geq x^2 \geq (-1)^2$ c'est-à-dire $9 \geq x^2 \geq 1$.

c. La fonction carré est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. On en déduit que : si $0 < x < 6$ alors $0^2 < x^2 < 6^2$ c'est-à-dire $0 < x^2 < 36$.

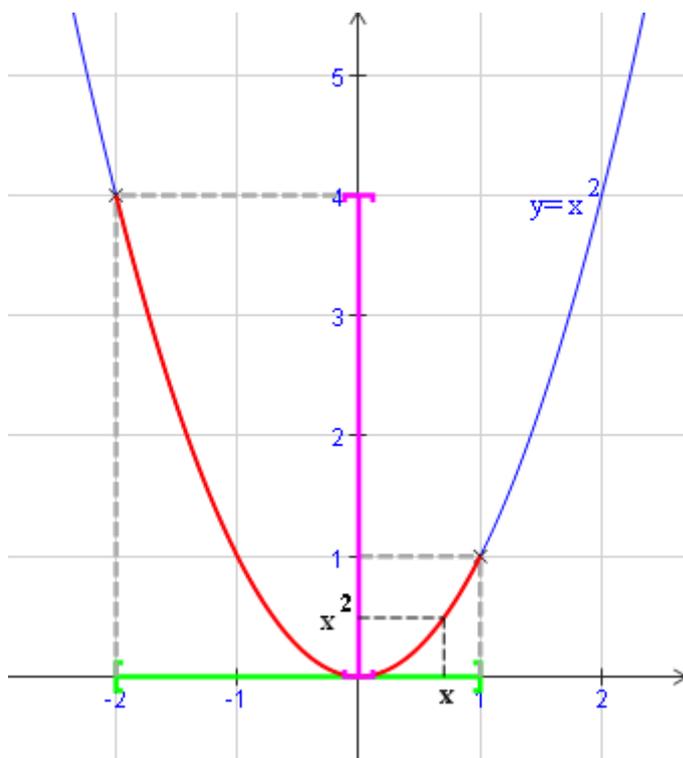
d. La fonction carré ne garde pas toujours le même sens de variation sur $[-2; 1]$.

On peut s'aider du dessin ci-dessous :

Voir animation GeoGebra

si $-2 \leq x \leq 1$ alors $0 \leq x^2 \leq 4$.

Voir animation Geoplan



Exercice 8

- a. Si $x \in [0 ; 4]$, c'est-à-dire si $0 \leq x \leq 4$, alors $0 \leq x^2 \leq 16$.
- b. Si $x \in] -3 ; -2[$, c'est-à-dire $-3 < x < -2$, alors $9 > x^2 > 4$.
- c. Si $x \in [-2 ; 2]$, c'est-à-dire $-2 \leq x \leq 2$ alors $0 \leq x^2 \leq 4$.
- d. Si $x \in] -1 ; 5]$, c'est-à-dire $-1 < x \leq 5$ alors $0 \leq x^2 \leq 25$.

Exercice 9

Soit d le diamètre du disque et r son rayon. On a donc $\mathcal{A} = \pi \times r^2$.
 Comme $16 \leq d \leq 17$, en divisant par 2 on a $8 \leq r \leq 8,5$.
 Le fonction carré étant strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, on a donc $8^2 \leq r^2 \leq 8,5^2$
 c'est-à-dire $64 \leq r^2 \leq 72,25$.
 En multipliant par π , on obtient : $64\pi \leq \mathcal{A} \leq 72,25 \pi$.
 Or $64\pi \approx 201,06$ et $72,25 \pi \approx 226,98$.
 On en déduit que $201 \leq \mathcal{A} \leq 227$ (en mm^2).

Fonction inverse

Exercice 10

Les images par la fonction inverse des nombres : $-3 ; \frac{2}{7} ; \frac{3}{4} ; 10^{-5} ; 10^3 ; -0,01$ sont, dans l'ordre, $-\frac{1}{3} ; \frac{7}{2} ; \frac{4}{3} ; 10^5 ; 10^{-3} ; -100$.

Exercice 11

- a. L'équation $\frac{1}{x} = 20$ a pour solution $\frac{1}{20} = 0,05$.
- b. L'équation $\frac{1}{x} = \frac{3}{2}$ a pour solution $\frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$.
- c. L'équation $\frac{1}{x} = 10^{-2}$ a pour solution $\frac{1}{10^{-2}} = 10^2 = 100$.
- d. L'équation $\frac{1}{x} = \frac{1}{4}$ a pour solution 4.

Exercice 12

- a. $\frac{1}{x-2} = 1 \Leftrightarrow x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = 3$.
- b. $\frac{1}{x-5} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x - 5 = 2 \Leftrightarrow x = 7$.
- c. $\frac{1}{2x+4} = 0,1 \Leftrightarrow 2x + 4 = \frac{1}{0,1} \Leftrightarrow 2x + 4 = 10 \Leftrightarrow x = 3$.
- d. $\frac{1}{3x} = 6 \Leftrightarrow 3x = \frac{1}{6} \Leftrightarrow x = \frac{1}{18}$.

Exercice 13

Méthode : on peut utiliser le sens de variation de la fonction inverse ou s'aider d'un dessin.

- a. La fonction inverse est strictement décroissante sur l'intervalle $] 0 ; +\infty[$ qui contient 7,6 et 8.
 De $7,6 < 8$ on déduit que $\frac{1}{7,6} > \frac{1}{8}$.

b. De même, de $0,1 > 0,07$ on peut déduire que $\frac{1}{0,1} < \frac{1}{0,07}$.

c. Comme $-\frac{1}{5,2} < 0 < \frac{1}{9,3}$, on a $-\frac{1}{5,2} < \frac{1}{9,3}$.

d. On peut commencer par comparer $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{1,4}$: de $1,4 < 3$ on déduit que $\frac{1}{1,4} > \frac{1}{3}$.

En multipliant par -1 , négatif, on change le sens des inégalités ce qui donne $-\frac{1}{1,4} < -\frac{1}{3}$.

Exercice 14

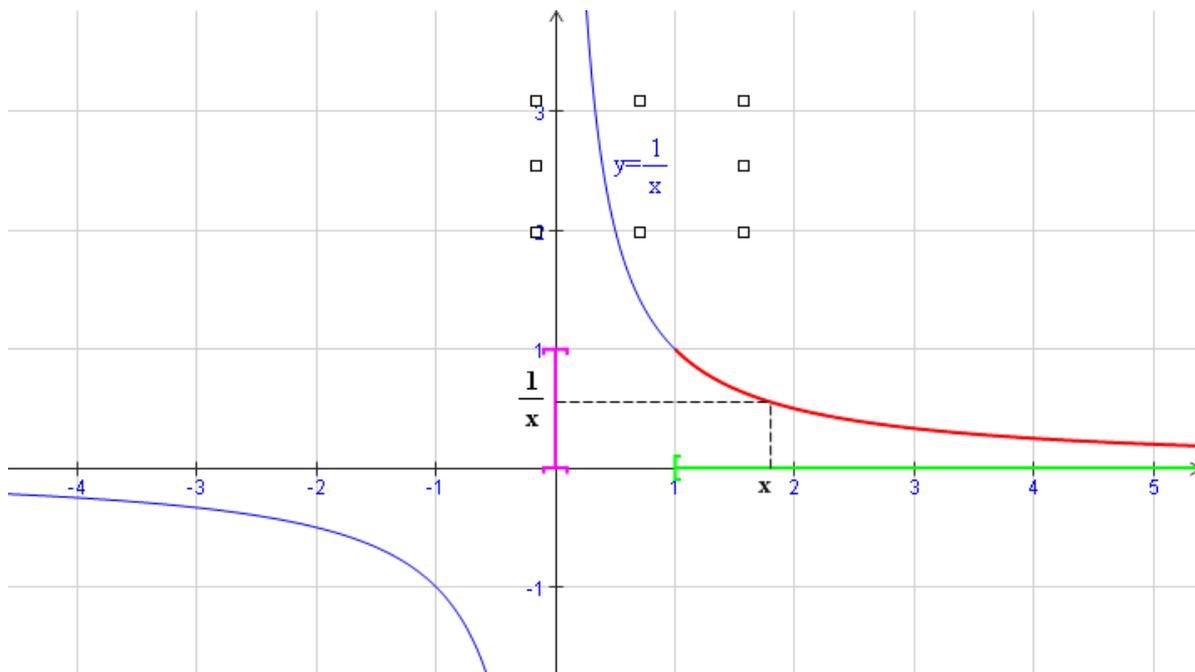
Méthode : on peut utiliser le sens de variation de la fonction inverse ou s'aider d'un dessin.

a. Si $2 \leq x \leq 3$ alors $\frac{1}{2} \geq x \geq \frac{1}{3}$ car la fonction inverse est strictement décroissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

b. Si $-5 \leq x \leq -1$ alors $-\frac{1}{5} \geq \frac{1}{x} \geq -1$ car la fonction inverse est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 0[$.

c. Si $0 < x < \frac{1}{6}$ alors $\frac{1}{x} > 6$

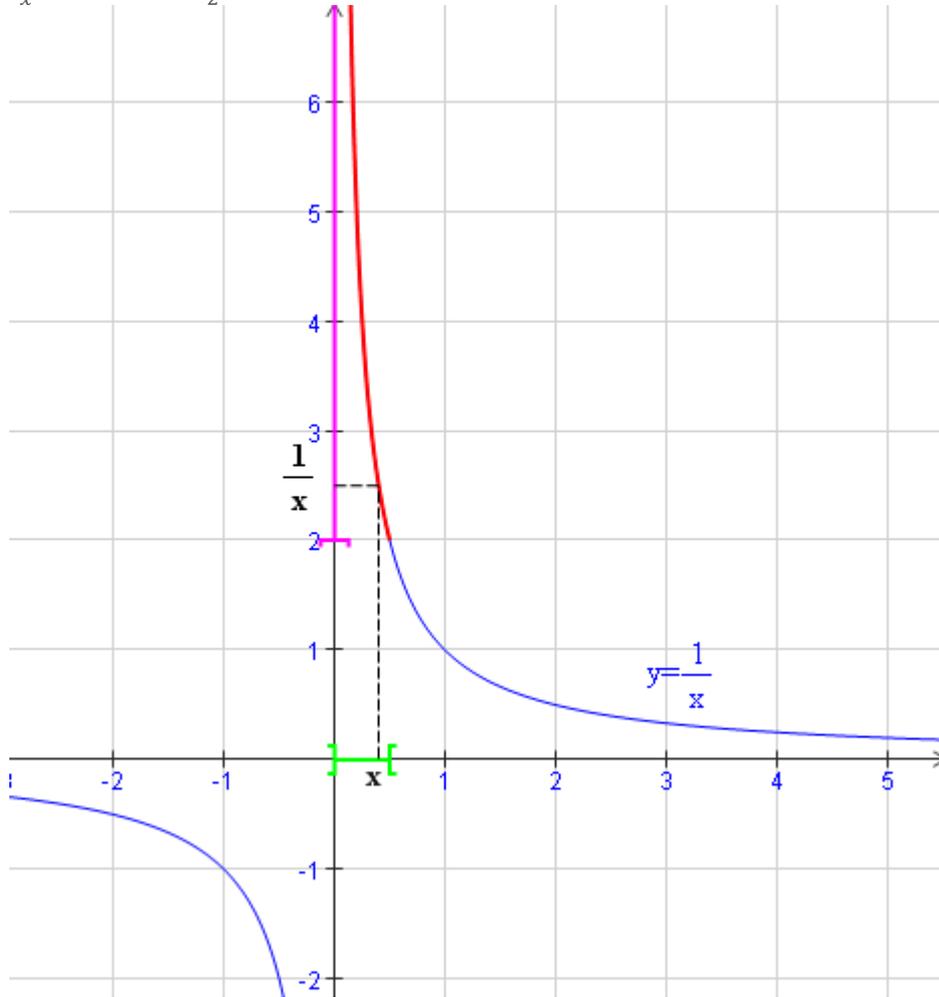
d. Si $x \geq 1$ alors $\frac{1}{x} \leq 1$; on peut même préciser que $0 < \frac{1}{x} \leq 1$.



Exercice 15

Méthode : on s'aide d'un dessin pour résoudre ces équations.

a. $2 < \frac{1}{x} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{2}$.



b. $\frac{1}{x} \leq -1 \Leftrightarrow -1 < x < 0$.

c. $0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{6} \Leftrightarrow x > 6$.

d. $\frac{1}{x} < 1 \Leftrightarrow x < 0 \text{ OU } x > 1$ (ce que l'on peut encore écrire $x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$).

Exercice 16

On sait que $U = RI$ donc $R = \frac{U}{I} = \frac{220}{I}$.

De $9,9 \leq I \leq 10,1$ on déduit que $\frac{1}{9,9} \geq \frac{1}{I} \geq \frac{1}{10,1}$.

En multipliant par 220, positif, on obtient : $\frac{220}{9,9} \geq \frac{220}{I} \geq \frac{220}{10,1}$

Donc $\frac{220}{9,9} \geq R \geq \frac{220}{10,1}$ ou encore $\frac{220}{10,1} \leq R \leq \frac{220}{9,9}$.

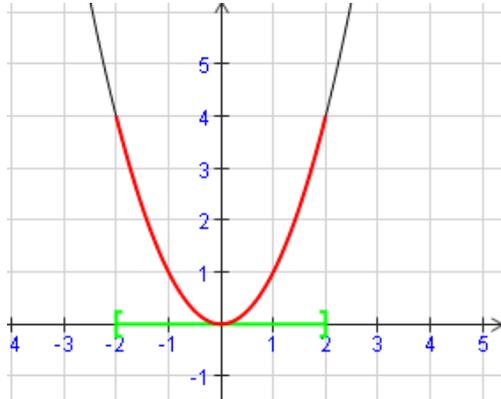
Comme $\frac{220}{9,9} \approx 22,22$ et $\frac{220}{10,1} \approx 21,78$, on en déduit que $21,7 \leq R \leq 22,3$.

Un peu de logique

Exercice 17 Vrai ou Faux ?

(A) Vrai.

On peut le voir graphiquement : si $x^2 \leq 4$ alors $-2 \leq x \leq 2$. Donc on est sûr que $x \leq 2$.



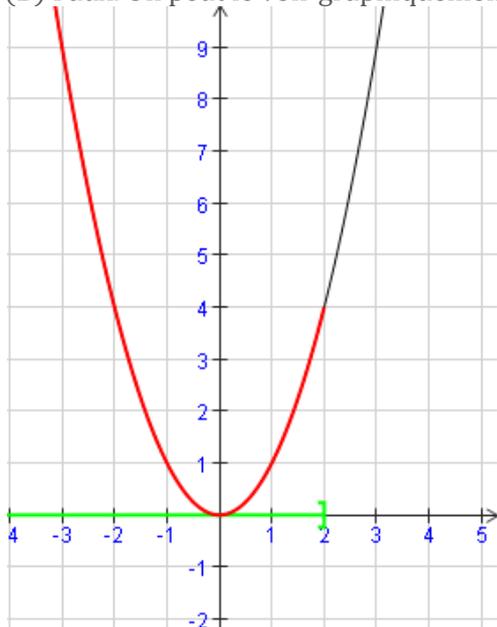
On peut aussi le démontrer par contraposition:

« $x^2 \leq 4$ alors $x \leq 2$ » est « si $x > 2$ alors $x^2 > 4$ ».

Cette contraposée est vraie du fait de la stricte croissance de la fonction carré sur $]0; +\infty[$.

Donc la proposition « si $x^2 \leq 4$ alors $x \leq 2$ » est elle aussi vraie.

(B) Faux. On peut le voir graphiquement :



Pour le démontrer, il suffit de donner un contre-exemple : pour $x = -3$, l'affirmation « $x < 2$ » est vraie mais l'affirmation « $x^2 < 4$ » est fautive puisque $x^2 = 9$.

(C) Faux.

On peut le voir graphiquement.

On peut le démontrer en donnant un contre-exemple : pour $x = 10$, l'affirmation « $x > 2$ » est vraie mais l'affirmation « $\frac{1}{x} > \frac{1}{2}$ » est fautive car $\frac{1}{x} = 0,1$ et $\frac{1}{2} = 0,5$.

On peut aussi plus rapidement démontrer que si $x > 2$ alors on a $\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$

(et donc $\frac{1}{x} > \frac{1}{2}$ est faux) par stricte décroissance de la fonction inverse sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

(D) Vrai. On peut le démontrer par contraposition car si $x > 3$, alors $\frac{1}{x} < \frac{1}{3}$ par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0; +\infty[$.

Fonctions polynômes de degré 2

Exercice 18

C_1 a pour équation $y = -x^2$; C_2 a pour équation $y = 2x^2$; C_3 a pour équation $y = 0,5x^2$.

Exercice 19

a. $f(x) = -x^2 + 4x - 1 = ax^2 + bx + c$ pour $a = -1, b = 4, c = -1$.

b. $f(x) = (2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9 = ax^2 + bx + c$ avec $a = 4, b = -12, c = 9$.

c. $f(x) = 4x(2 - x) = -4x^2 + 8x = ax^2 + bx + c$ avec $a = -4, b = 8, c = 0$.

d. $f(x) = 3x^2 = ax^2 + bx + c$ avec $a = 3, b = 0, c = 0$.

Exercice 20

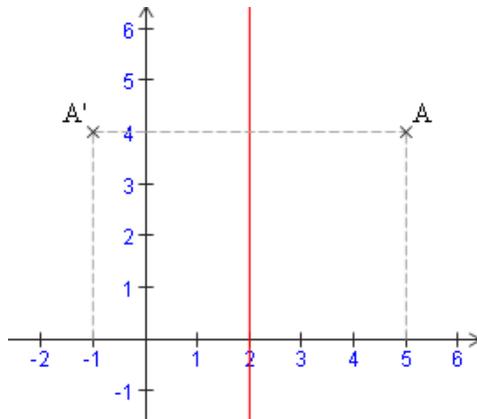
1. Comme f est une fonction polynôme de degré 2, C_f est une parabole.

De $f(5) = 4$, on déduit que C_f passe par le point A (5 ; 4).

Comme f admet un extremum en 2, l'axe de symétrie de la parabole est la droite d d'équation $x = 2$.

2. On en déduit que le symétrique A' du point A par rapport à la droite d appartient lui aussi à la courbe. Ses coordonnées étant (-1 ; 4) on en déduit que $f(-1) = 4$.

Le réel cherché est donc -1.



Exercice 21

1. La fonction h est une fonction polynôme de degré 2 donc C_h est une parabole.

2. $h(2) = h(5)$ donc les points d'abscisses 2 et 5 de C_h ont la même ordonnée et sont donc symétriques par rapport à l'axe de symétrie de la parabole.

L'axe de symétrie de la parabole est donc la droite d'équation $x = \frac{2+5}{2}$ soit $x = 3,5$.

Exercice 22

1. C_f est une parabole.

2. $f(0) = 5$ et $f(6) = 5$. Donc A et B ont la même ordonnée 5.

3. A et B sont symétriques par rapport à l'axe de la parabole. Cet axe de symétrie est donc la droite d'équation $x = 3$.

4. Le sommet S de C_f a pour abscisse 3 puisqu'il appartient à l'axe de symétrie. Son ordonnée est $f(3) = -4$. Donc S a pour coordonnées (3 ; -4).

5. Tableau de variation de f :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$			

Exercice 23

1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0$ ou $8 - x = 0$.

Les solutions sont 2 et 8.

2. Les points d'intersection de l'axe des abscisses avec la courbe C_f ont pour coordonnées (2 ; 0) et (8 ; 0).

3. L'axe de symétrie de C_f est donc la droite d'équation $x = 5$.

Le sommet de C_f a pour abscisse 5 et pour ordonnée $f(5) = 9$. Il s'agit donc du point S (5 ; 9).

4. Tableau de variation de f :

x	$-\infty$	5	$+\infty$
$f(x)$			

Exercice 24

1. Pour tout réel, $f(x) = 5 - 2(x^2 + 2x + 1) = 5 - 2x^2 - 4x - 2 = -2x^2 - 4x + 3$.

On a donc bien $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = -2, b = -4, c = 3$.

Par conséquent f est une fonction polynôme de degré 2.

2. Pour tout réel x , $(x + 1)^2$ est positif ou nul, donc $2(x + 1)^2$ aussi.

De ce fait $f(x) \leq 5$ pour tout x .

3. On sait que $f(x) \leq 5$ pour tout x . De plus $f(-1) = 5$.

On en déduit que f admet pour maximum 5 et que ce maximum est atteint en -1 .

4. Tableau de variation de f :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$			

Fonctions homographiques

Exercice 25

On considère les fonctions f définies de la façon suivante :

a. $f(x) = -\frac{2}{x+3} = \frac{-2}{x+3} = \frac{ax+b}{cx+d}$ avec $a = 0, b = -2, c = 1, d = 3$.

Donc f est une fonction homographique.

Elle est définie en tout réel x tel que $x + 3 \neq 0$, donc en tout réel $x \neq -3$.

Autrement dit son ensemble de définition est $] -\infty; -3 [\cup] -3; +\infty [$ (encore noté $\mathbb{R} - \{-3\}$).

On peut contrôler graphiquement à la calculatrice qu'il n'y a pas de point d'abscisse -3 sur la courbe représentative de f .

b. $f(x) = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x} = \frac{ax+b}{cx+d}$ avec $a = 2, b = -1, c = 1, d = 0$.

Donc f est une fonction homographique.

Son ensemble de définition est $] -\infty; 0 [\cup] 0; +\infty [$ [encore noté $\mathbb{R} - \{0\}$, ou \mathbb{R}^*].

On peut contrôler graphiquement à la calculatrice qu'il n'y a pas de point d'abscisse 0 sur la courbe représentant f c'est-à-dire que celle-ci ne coupe pas l'axe des ordonnées.

c. $f(x) = \frac{2x}{x-1} + 3 = \frac{2x}{x-1} + \frac{3(x-1)}{x-1} = \frac{2x+3x-3}{x-1} = \frac{5x-3}{x-1} = \frac{ax+b}{cx+d}$ avec $a = 5, b = -3, c = 1, d = -1$.

Donc f est une fonction homographique.

Elle est définie en tout réel x tel que $x - 1 \neq 0$, donc en tout réel x différent de 1 .

Autrement dit son ensemble de définition est $] -\infty; 1 [\cup] 1; +\infty [$ [encore noté $\mathbb{R} - \{1\}$].

On peut contrôler graphiquement à la calculatrice qu'il n'y a pas de point d'abscisse 1 sur la courbe représentative de f .

d. $f(x) = \frac{3}{4-x} - 2 = \frac{3}{4-x} - \frac{2(4-x)}{4-x} = \frac{3}{4-x} - \frac{8-2x}{4-x} = \frac{3-(8-2x)}{4-x} = \frac{2x-5}{4-x} = \frac{2x-5}{-x+4}$

Ainsi $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ avec $a = 2, b = -5, c = -1, d = 4$ et f est une fonction homographique.

Elle est définie en tout réel x tel que $-x + 4 \neq 0$, donc en tout réel $x \neq 4$.

Autrement dit son ensemble de définition est $] -\infty; 4 [\cup] 4; +\infty [$ [encore noté $\mathbb{R} - \{4\}$].

On peut contrôler graphiquement à la calculatrice qu'il n'y a pas de point d'abscisse 4 sur la courbe représentative de f .

Exercice 26

1. $x + 3$ ne s'annule qu'en -3 donc g est définie sur $] -\infty; -3 [\cup] -3; +\infty [$.

2. Pour $x \neq -3, \frac{2x-4}{x+3} = 5 \Leftrightarrow 2x - 4 = 5(x + 3) \Leftrightarrow x = -\frac{19}{3}$.

La solution est $-\frac{19}{3}$ (qui est bien différente de -3).

Exercice 27

a. On doit avoir $2x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{2}$.

Pour $x \neq -\frac{1}{2} : \frac{3-x}{2x+1} = 0 \Leftrightarrow 3 - x = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

L'équation a une seule solution : 3 .

b. Il faut que $5x - 3 \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq \frac{3}{5}$.

Pour $x \neq \frac{3}{5} : \frac{2}{5x-3} = 1 \Leftrightarrow 2 = 5x - 3 \Leftrightarrow x = 1$.

La solution de cette équation est 1 .

c. On doit avoir $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.

Pour $x \neq 2 : \frac{2x+1}{x-2} = 4 \Leftrightarrow 2x + 1 = 4(x - 2) \Leftrightarrow x = \frac{9}{2}$.

La solution de cette équation est $\frac{9}{2}$.