Des configurations sans repère

Exercice 1

1. Longueur IB :
On sait que $AB = 6$ cm et que I est le milieu de [AB] donc $IB = 3$ cm.

Longueur BC :
Dans le triangle rectangle ABC, par le théorème de Pythagore : $AB^2 = BC^2 + AC^2$.
On en déduit que $BC^2 = 36 - 16 = 20$.
Par suite, $BC = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$ (en cm).

Longueur JB :
Les droites (IJ) et (AC) sont parallèles et I est le milieu de [AB] donc par un « théorème des milieux », J est le milieu de [BC].
Par suite, $JB = \frac{1}{2}\,BC = \sqrt{5}$ (en cm).

2. Longueur BD :
Dans le triangle BCD rectangle en D, on a $\cos\widehat{DBC} = \frac{BD}{BC}$.
Par énoncé, $\widehat{DBC} = 30°$ donc $BD = BC \times \cos 30° = 2\sqrt{5} \times \cos 30°$.
À la calculatrice, on obtient $BD \approx 3{,}9$ cm au mm près.

Longueur JK :
Dans le triangle BKJ rectangle en K , on a $\sin J\widehat{B}K = \frac{JK}{JB}$ et $J\widehat{B}K = 30°$.
On a donc $JK = JB \times \sin 30° = \sqrt{5} \times \sin 30°$.
À la calculatrice, on obtient $JK \approx 1{,}1$ cm au mm près.

Exercice 2

Calculons NP et HP :
dans le triangle MNP rectangle en M, on a d'après le théorème de Pythagore ,
$NP^2 = MN^2 + MP^2$
d'où $NP^2 = 24^2 + 32^2 = 1600$.
On en déduit que $NP = 40$.
De plus, H appartient à [NP] et $NH = 14$ d'où $HP = 40 - 14 = 26$.

Pour savoir si H est le pied de la hauteur il faut chercher si MHN et MHP sont des triangles rectangles.

Supposons que H est le pied de la hauteur issue de M dans le triangle MNP.
Alors MHN et MHP sont des triangles rectangles en H.
Par le théorème de Pythagore dans le triangle MHN, on a $HM^2 = 24^2 - 14^2 = 380$.
Par le théorème de Pythagore dans le triangle MHP, on a $HM^2 = 32^2 - 26^2 = 348$.
On arrive à une contradiction.

Conclusion : H n'est pas le pied de la hauteur issue de M dans le triangle MNP.

Remarque : on a mis en œuvre un « raisonnement par l'absurde » (voir page 354).

Exercice 3

a. Le périmètre de ABECD est $\mathrm{AB} + \mathrm{BE} + \mathrm{EC} + \mathrm{CD} + \mathrm{DA} = 5a$.

b. L'aire de ABECD est la somme de l'aire du carré ABCD et de celle du triangle BEC.

L'aire de ABCD est a^2.

L'aire de BEC est $\frac{\mathrm{BC}\times\mathrm{EH}}{2}$ avec $\mathrm{BC} = a$. $\quad (aire\ d'un\ triangle = \frac{base \times hauteur}{2})$

Calculons EH :
le triangle BEC est isocèle en C donc la hauteur [EH] est aussi la médiatrice du segment [BC] et de ce fait H est le milieu de [BC].
On a donc $\mathrm{BH} = \frac{1}{2}\mathrm{BC} = \frac{a}{2}$
Par le théorème de Pythagore dans le triangle BHE rectangle en H,
on a $\mathrm{EH}^2 = \mathrm{BE}^2 - \mathrm{BH}^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$
donc $\mathrm{EH} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3a^2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ (car $a \geq 0$).

L'aire de BEC est donc $\frac{a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

Par conséquent, l'aire de ABECD est $a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)a^2$.

Dans un repère

Exercice 4

Calculer les coordonnées du milieu K du segment [CD] :
a. $x_\mathrm{K} = \frac{-2+2}{2} = 0$ et $y_\mathrm{K} = \frac{3+(-3)}{2} = 0$ donc $\mathrm{K}(0;0)$.
b. $x_\mathrm{K} = \frac{2+(-4)}{2} = -1$ et $y_\mathrm{K} = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$ donc $\mathrm{K}(-1;\frac{\sqrt{2}+1}{2})$.

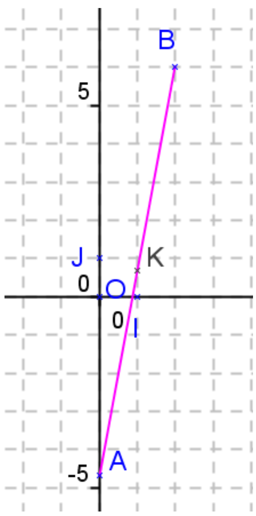
Exercice 5

Soit $(x_\mathrm{A}\,; y_\mathrm{A})$ le couple de coordonnées du point A.
K doit être le milieu du segment [AB] donc on doit avoir :

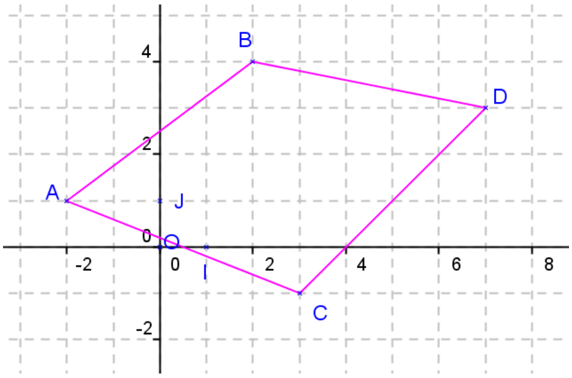
$\frac{x_\mathrm{A}+2}{2} = 1$ d'où $x_\mathrm{A} + 2 = 2$ donc $x_\mathrm{A} = 0$.

$\frac{y_\mathrm{A}+6}{2} = \frac{2}{3}$ d'où $y_\mathrm{A} + 6 = \frac{4}{3}$ donc $y_\mathrm{A} = \frac{4}{3} - 6 = -\frac{14}{3}$.

Par conséquent, A $(0\,; -\frac{14}{3})$.



Exercice 6



Sur une figure, ABDC ne semble pas être un parallélogramme.

Cherchons les milieux des diagonales de ABDC.
Soit K le milieu de [AD] et L le milieu de [BC].
On a alors :

$x_K = \frac{-2+7}{2} = \frac{5}{2}$ et $y_K = \frac{1+3}{2} = 2$

d'où $K(\frac{5}{2}\ ;\ 2)$.

$x_L = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$ et $y_L = \frac{4+(-1)}{2} = \frac{3}{2}$

d'où $L\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Comme $\frac{3}{2} \neq 2$, les points K et L sont distincts.

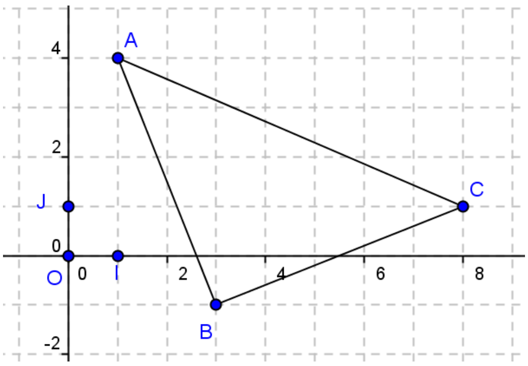
Les deux diagonales de ABDC n'ont pas le même milieu donc ABDC n'est pas un parallélogramme.

Exercice 7

a. $AB = \sqrt{(0+2)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{13}$

b. $AB = \sqrt{(3+2)^2 + (-4-8)^2} = \sqrt{169} = 13$

Exercice 8



On commence par faire une figure.

Calculons les longueurs des trois côtés du triangle :

$AB = \sqrt{(3-1)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{29}$

$BC = \sqrt{(8-3)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{29}$

$AC = \sqrt{(8-1)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{58}$

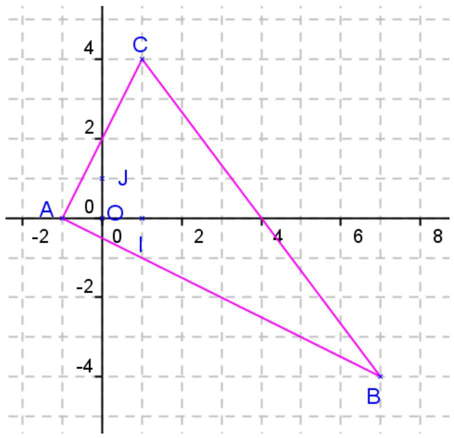
On constate que AB = BC donc le triangle ABC est isocèle en B.

De plus $AB^2 + BC^2 = 29 + 29 = 58$ et $AC^2 = 58$.
Par conséquent d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

Conclusion : ABC est un triangle rectangle isocèle en B.

Exercice 9

a. On commence par faire une figure



Le triangle semble rectangle en A.
Démontrons-le.

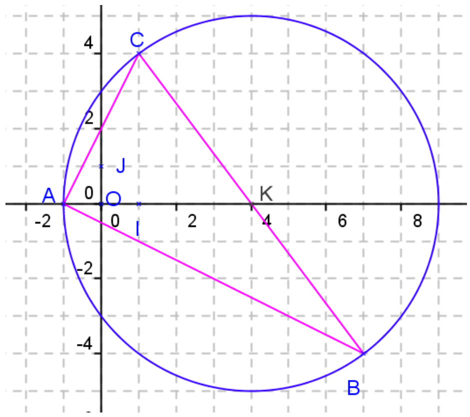
$\mathrm{AB} = \sqrt{(7-(-1))^2+(-4-0)^2} = \sqrt{80}$

$\mathrm{BC} = \sqrt{(1-7)^2+(4-(-4))^2} = \sqrt{100} = 10$

$\mathrm{AC} = \sqrt{(1-(-1))^2+(4-0)^2} = \sqrt{20}$

$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2 = 80+20 = 100$ et $\mathrm{BC}^2 = 100.$
Par conséquent, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

b. Puisque ABC est un triangle rectangle, le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse donc K est le milieu de [BC].



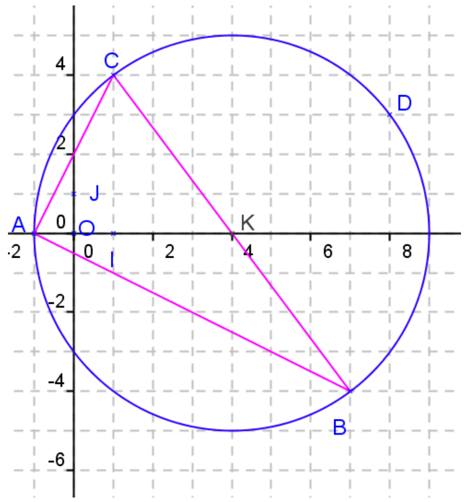
Donc $\mathrm{K}\left(\frac{x_\mathrm{B}+x_\mathrm{C}}{2};\frac{y_\mathrm{B}+y_\mathrm{C}}{2}\right)$ soit $\mathrm{K}(4\,;\,0)$.

Le rayon du cercle est égal à la moitié de la longueur BC soit $r=5$.

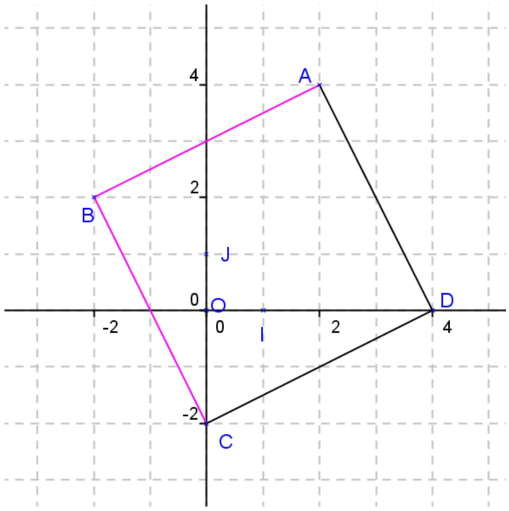
c. Plaçons D sur la figure. Il semble que D appartient au cercle $\mathcal{C}$.
Démontrons-le en calculant KD :

$\mathrm{KD} = \sqrt{(8-4)^2+(3-0)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5.$

On constate que $\mathrm{KD} = r$, donc le point D appartient bien au cercle $\mathcal{C}$ de centre K et de rayon r.



Exercice 10



Commençons par faire une figure.
Il semble que ABCD soit un carré.
Démontrons-le.

• Commençons par vérifier si ABCD est un parallélogramme.
Soit K le milieu de [AC] et L le milieu de [BD].
Par le calcul on obtient $K(1\,;1)$ et $L(1\,;1)$.
Ces deux points sont confondus, les diagonales de ABCD se coupent donc en leur milieu :
ABCD est donc un parallélogramme.

• Calculons maintenant les longueurs de deux côtés consécutifs :
$\mathrm{AB}=\sqrt{(-2-2)^2+(2-4)^2}=\sqrt{20}$
$\mathrm{AD}=\sqrt{(4-2)^2+(0-4)^2}=\sqrt{20}$.
ABCD est un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs égaux,
donc **ABCD est un losange**.

• Vérifions maintenant que ABCD a un angle droit.
$\mathrm{BD}=\sqrt{\left(4-(-2)\right)^2+(0-2)^2}=\sqrt{40}$
On a $\mathrm{AB}^2+\mathrm{AD}^2=\mathrm{BD}^2$ donc ABD est triangle rectangle en A.
ABCD est un losange avec un angle droit en A. On en déduit que **ABCD est un carré.**