Translation-égalité de vecteurs

Exercice 1

a. E **b.** G **c.** I **d.** A

Exercice 2

a. $\overrightarrow{AE}.= \overrightarrow{FI}.$

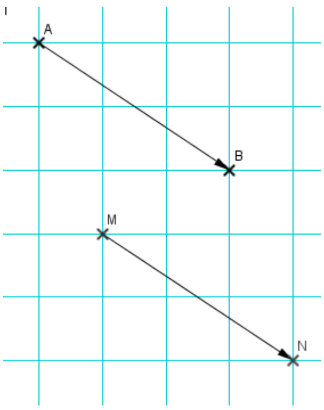
b. $\overrightarrow{FI}$; $\overrightarrow{IG}$; $\overrightarrow{DH}$; $\overrightarrow{HC}$; $\overrightarrow{AE}$

c. $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont égaux.

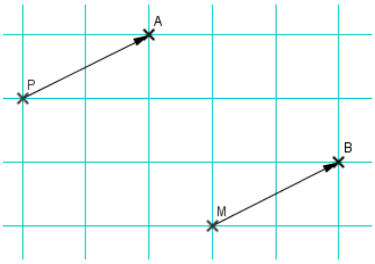
d. $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{BD}$ ne sont pas égaux.

Exercice 3

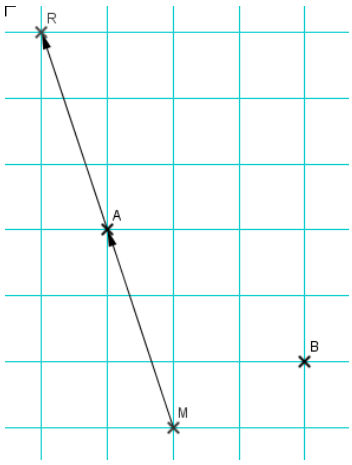
a. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$



b. $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{MB}$



c. R image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{MA}$

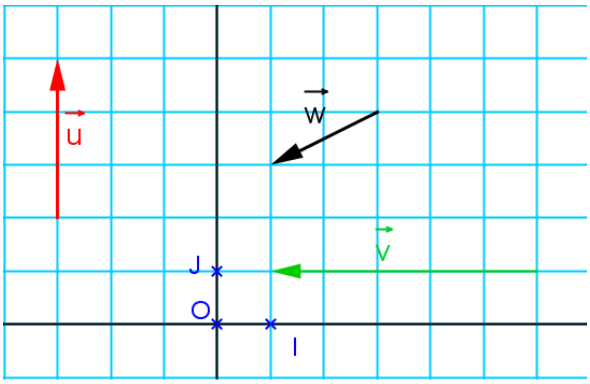


Les coordonnées d'un vecteur

Exercice 4

1. $\overrightarrow{BA}\binom{-3}{3}$, $\overrightarrow{CD}\ \binom{0}{-3}$ et $\overrightarrow{EF}\binom{3}{-2}$

2. Une solution :



Exercice 5

a. $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$ **b.** $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-1\\-5\end{pmatrix}$ **c.** $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ **d.** $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}14\\13\end{pmatrix}$

Exercice 6

a. On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-7\\-2\end{pmatrix}$.
Les vecteurs ne sont pas égaux donc ABCD n'est pas un parallélogramme.
b. On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.
Les vecteurs sont égaux donc ABCD est un parallélogramme.

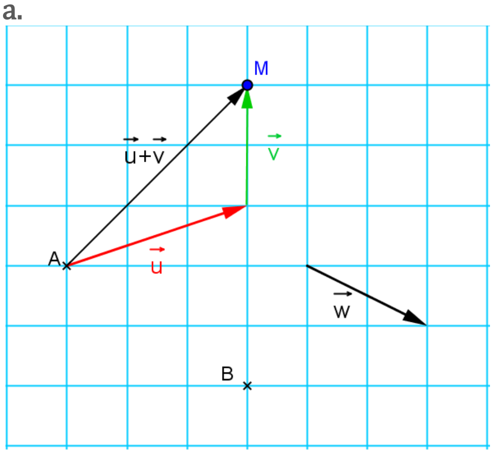
Somme et différence de vecteurs

Exercice 7

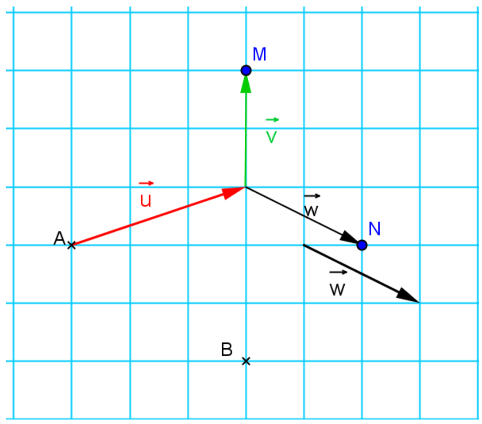
a. $\overrightarrow{AI}$ **b.** $\overrightarrow{GH}$ **c.** $\vec{0}$ **d.** $\overrightarrow{HE}$

Exercice 8

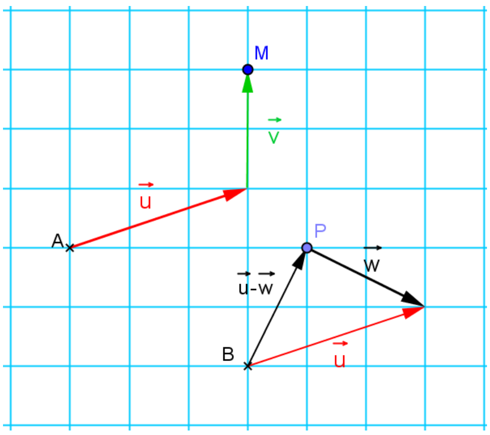
a.



b.



c.



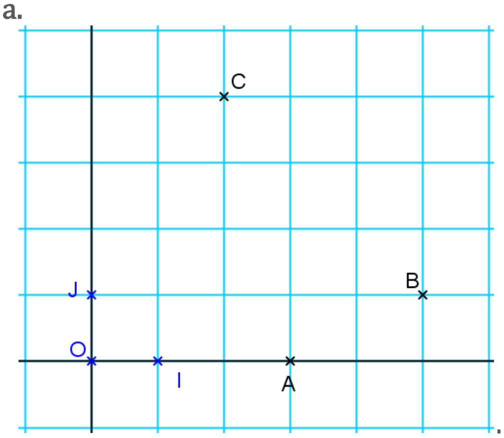
Exercice 9

a. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG}$ **b.** $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AM}$ **c.** $\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HI} = \overrightarrow{GI}$ **d.** $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CD}$

Déterminer les coordonnées d'un point

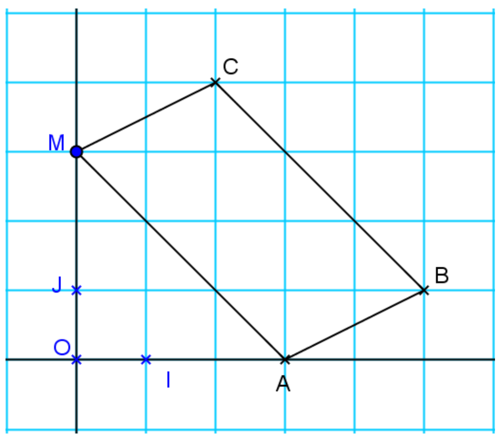
Exercice 10

a.



b. ABCM est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MC}$.
Appelons x et y les coordonnées du point M.
On a alors : $\overrightarrow{AB}\binom{2}{1}$ et $\overrightarrow{MC}\binom{2-x}{4-y}$.
Ces vecteurs sont égaux si et seulement si $2-x=2$ et $4-y=1$.
On en déduit que M (0 ; 3).

c. On contrôle graphiquement ce résultat :



Exercice 11

On appelle (x ; y) les coordonnées de M.

Alors $\overrightarrow{MA}\binom{-2-x}{5-y}$ et $\overrightarrow{MB}\binom{6-x}{-3-y}$ donc $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\binom{4-2x}{2-2y}$

On en déduit que $4-2x=0$ et $2-2y = 0$ d'où M (2 ; 1).

Autre méthode
L'égalité vectorielle donnée traduit le fait que M est le milieu de [AB]
donc M $\left(\frac{-2+6}{2} ; \frac{5-3}{2}\right)$
soit $M(2; 1)$.

Produit d'un vecteur par un réel

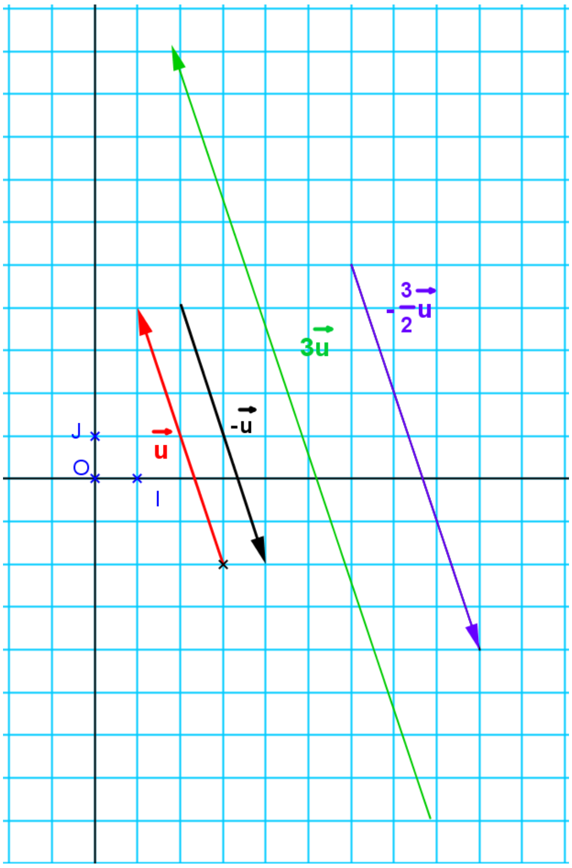
Exercice 12

$-\vec{u}$ a pour coordonnées $\binom{2}{-6}$;

$3\vec{u}$ a pour coordonnées $\binom{-6}{18}$;

$-\frac{3}{2}\vec{u}$ a pour coordonnées $\binom{3}{-9}$

On a tracé ci-contre des représentants de ces vecteurs.



Exercice 13

a. Soit (x ;y)les coordonnées du point M. On a alors :

$\overrightarrow{AM}\binom{x+2}{y-3}$, $\overrightarrow{BC}\binom{3}{1}$ et $\overrightarrow{AB}\binom{-2}{2}$ d'où $\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ $\binom{2}{2}$.

L'égalité $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ se traduit alors par $x+2=2$ et $y-3=2$ d'où $x=2$ et $y=5$.

On a donc M (2 ; 5).

b. Le milieu de [AD] a pour coordonnées $(\frac{-2+6}{2} ; \frac{3+7}{2})$ soit (2 ;5). C'est donc bien le point M.

Exercice 14

a. Pour $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4{,}5\\-6\end{pmatrix}$, on constate que $\vec{v} = -1{,}5\,\vec{u}$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires (autre méthode : vérifier que $(-3)\times(-6) = 4\times 4{,}5$).

b. Pour $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$, on compare $2\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ et $1\times\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

On obtient le même résultat donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2. Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-3x\\x\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\2\end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $-6x = x^2$

On résout donc l'équation $-6x = x^2$ qui s'écrit encore $x^2+6x=0$ ou encore $x(x+6) = 0$.
Ce produit est nul si et seulement si $x=0$ ou $x+6=0$.
Il y a donc deux solutions : $x=0$, $x=-6$.

Remarque : on peut vérifier que pour ces valeurs les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont bien colinéaires.

Exercice 15

Les droites (MN) et (PQ) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont colinéaires.
Or $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$et $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}-3\\9\end{pmatrix}$. On constate que $\overrightarrow{PQ} = -3\,\overrightarrow{MN}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont colinéaires donc les droites (MN) et (PQ) sont parallèles.

Exercice 16

Les points sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}12\\4\end{pmatrix}$.
On constate donc que $\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{AC}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires donc les droites (AB) et (AC) sont parallèles. Ayant A comme point commun, elles sont donc confondues et par suite, A, B et C sont alignés.

Exercice 17

$A(4\,;-1)$, $B(8\,;2)$ et $C(-1\,;-5)$ on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5\\-4\end{pmatrix}$.
$4 \times (-4) \neq 3 \times 5$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
Les points A, B et C ne sont donc pas alignés.